任意の3次相関関数をもつ定常確率過程をランダム・ウェーブレットの重ね合わせで合成する方法

坂口 文則*

1 はじめに

物理学・工学等の様々な分野で現れる不規則な変動を扱う方法は各種あるが、その中の一つに、ランダムな変動を確率過程の見本過程と見做して分析を行う方法がある。(対象となる現象の生起するメカニズムについて何らかの物理的意味付けが可能な確率モデルを措定することもあるし、それらに関する情報が不足している場合や厳密な取扱いが complexity の点からみて困難な場合に便宜的に確率過程でモデル化する場合もある。本報告では両者の区別に特に立入ることなく議論を続けるが、そもそもこの両者がもともと峻別できる類のものであるかどうかについては周知のように種々の見解があり議論の余地があろう。冒頭から余談だが、筆者には両者の区別がそれほど本質的でないという見解の方がより自然な感じがする。以上蛇足。) さて、その際に確率過程をどのようなスタイルで記述するかには様々な可能性があり、例えばランジュヴァン方程式などの確率微分方程式タイプのスタイルで記述する方法や、互いにある種の相関をもったランダムなフーリエ成分の重ね合わせとして表現する方法などがあるが、本報告では、確率過程をランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせとして表わすときの問題を取り扱う。

ウェーブレット(例えば文献 [1－6] 参照)は”同じ形”の局在した関数にスケール変換と生起時刻のシフトを施すことによって得られる基底関数系(この場合は直交ウェーブレット関数系と呼ばれＣＯＮＳをなす)もしくは over-complete な(信号処理の言葉でいう)擬似直交完全系(注意:この場合は非直交ウェーブレット関数系と呼ばれ、”擬似直交”は直交を意味するのではない!)であり、その(”擬似”)基底関数の局在性と2乗可積分性に由来する利点を活かして、近頃画像・音声などの信号処理の様々な問題に盛んに応用されている。(またまた蛇足になるが、ウェーブレットのルーツあるいは最初の提案者については専門分野毎に諸説があり、複数の分野で互いに独立に、数学的には互いに等価な共通部分をもち少しづつ異なるいくつかの理論が、いろいろな名前で呼ばれ、いろいろな記法で書かれていたのが真相に近いらしい。この辺の事情については例えば文献 [5] の2章に詳しい。そのような事情もあって、ここでは歴史的経緯に関してかなり曖昧なイントロしかできない点をお許し下さい。) 後者の over-complete な非直交ウェーブレット関数系は、後述のように数理物理でいうアフィン群 [7, 8] の generalized coherent states(ＧＣＳについては [9] 参照)と数学的には同じものであることが知られている [10,6]。直交・非直交いずれのウェーブレットの場合も、2乗可積分な関数の空間で完全系をなすので、当然のことながら任意の2乗可積分関数はこれらの基底もしくは”擬似基底”の重ね合わせとして書け、すなわちウェーブレットを用いて一種の基底変換ができる(ウェーブレット変換と呼ばれている。)。基底変換であるからには、確率過程についても同様にウェーブレットの重ね合わせに展開でき、但し deterministic な関数の展開の場合とは異なり、その展開係数が(一般には複雑な相関構造をもった)確率変数となる。確率過程の一つの捉え方として、このように確率過程をウェーブレットの重ね合わせで表したときの展開係数の統計的振舞いや相関構造に着目する方法があり、基本的にはもし展開係数間の同時確率分布を完全に記述できれば確率過程の性質は全て specify できることになる。(さらに特殊な場合として平均 0 のガウス性確率過程に話を限れば、展開係数の共分散関数を

*福井大学工学部電子工学科, 〒910 福井市文京 3-9-1
e-mail:saka@digcom.fuee.fukui-u.ac.jp

与えれば確率過程は一意的に指定できる。）ところで、deterministic な信号へのウェーブレットの応用に関する研究はこれまでに無数に試みられているのに比べ、確率過程に応用した研究は比較的少なく、近年いくつかの模索的研究が始まったところである [11 – 15] 。それらには各種のアプローチがあるが、例えば近年 Wong [14] は有限な分散をもつ連続時間確率過程のウェーブレットによる展開の一般的記述を提案している。上述のように、確率過程のウェーブレットによる展開に基づくアプローチは、要するに基底変換であるので幅広いクラスの任意の確率過程にわたって可能であるが、この基底変換によって結局は確率過程の統計的性質の問題が展開係数間の統計的性質の問題に翻訳されることになるため、ウェーブレット変換によって確率過程の"相関構造"が展開係数間のより簡単な"相関構造"に帰着できるかが重要な論点となる。もしこれができれば確率過程をウェーブレットで展開した利点が生ずることになるし、もしできなければ単なる基底変換の域を出ないことになるかも知れない。

ところで、フーリエ基底を用いて確率過程を展開するというアプローチの場合には、上記の問題に相当する問題は、以下に示すような形で解釈することができる。スペクトル解析でいうランダム信号のパワ・スペクトルは、周知のように換言すれば確率過程をフーリエ基底で展開したときの展開係数の分散である。特に、確率過程が定常である場合には、フーリエ基底は自己相関関数の（自己相関関数を積分核と考えたときの）固有関数系となっているため、フーリエ基底を用いた展開により確率過程の自己相関は対角化され（つまり、異なる係数の間の２次相関は消える）、その対角成分であるパワ・スペクトルのみによって自己相関は完全に特徴づけられる。さらに特殊な場合として平均 0 のガウス性定常確率過程の場合には、それぞれパワ・スペクトルに比例したエネルギー密度をもち互いに独立にランダムに発生するフーリエ成分の mixture と見做せることになる。これに相当する議論がウェーブレットによる展開についても成り立たないか、すなわちウェーブレットを用いて確率過程の相関を対角化問題を考えることは、不規則な変動を独立にランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせと見做す直観的にわかりやすい描像を得る可能性を提供するでけでなく、統計的信号処理の各種アルゴリズムの簡略化に役立つ可能性がある。ところで、自己相関関数の対角化問題は Karhunen-Loève 展開として知られており、正規直交基底を用いた基底変換の場合には、当然のことながら基底が自己相関関数の固有関数系に一致しているときのみ対角化が可能であり、残念ながら直交ウェーブレット関数系が相関を対角化するのは極めて特殊なタイプの自己相関をもつ確率過程に限られる。一方、over-complete な擬似直交系をなす非直交ウェーブレットによる展開の場合には、展開のしかたに自由度があるため、"擬似基底"が自己相関の固有関数系になっていない場合でも展開係数間の相関を形式上対角化できる可能性がある（以下では「擬似対角化」と呼ぶことにする。）。 量子光学において数学的にこれとアナロジーのある"擬似対角化"問題の一つに"Glauber の P－表現" [16 – 18] があるが、これにおいて用いられるものと類似の作用素代数の応用によって、任意に与えられた相関関数をもつ擬似対角形の展開係数を求めることができることを、本報告の前半で示す。しかしながら、（擬似）対角成分の全てが非負な形では表せない場合が存在すること、したがって相関の擬似対角化に成功してもそれに対応するランダム・ウェーブレットの重ね合わせが合成できない場合があることも同時に示される。

以上のように確率過程の２次統計量である自己相関関数に関しては、非直交ウェーブレットを用いた擬似対角化は一般に可能であるものの、必ずしも全ての確率過程が単純な相関構造をもつウェーブレットの重ね合わせで簡単に合成する一般的方法があるという結果にまで至っていないが、話を３次統計量に移すと、非負条件が要らないことから、問題はある面においてかえって簡単になる。本報告の後半部分では、この点について調べる。ガウス性確率過程は２次までの統計量のみでその性質を完全に記述することができるが、非ガウス性のものになると３次以上の統計量を調べる必要が出てくる。非ガウス性定常確率過程の高次統計量 [19] は高次相関関数または高次キュムラント・スペクトルによって記述することができ、各種の特殊な生成モデルによって作られる非ガウス性ガウス性確率過程の高次統計量の表式はいくつか知

られているが、高次統計量に関して一般性をもつ確率過程の簡便な生成法を考えることは困難である。話を離散時間確率過程に限った場合には、任意に与えられた３次相関関数をもつような確率過程を生成する簡単なモデルは、筆者ら [20] によって提案されている。しかしながら、そのままの形で連続時間に拡張することは難しい。ところが、直交ウェーブレットと深い関連のある多重解像度分析 [6] の発想を用いれば、３次相関関数の各解像度成分に相当する３次相関のみをもつような独立な確率過程を作ることができる。これを利用すれば、従来とは異なる観点から、任意の３次相関関数をもつような確率過程を合成する方法が提案できる。本報告の後半では、このアイデア基づき、任意に与えられた３次相関関数をもつ定常確率過程を簡単な相関構造をもつランダムなウェーブレット（あるいはスケーリング関数）の重ね合わせで合成する一般的な方法を提案する。(但し、この方法は、２次の場合に述べたような相関の完全な擬似対角化ではなく、展開係数の特殊な部分のみに単純なアルゴリズムで合成可能なタイプの高次相関をもたせるものである。)

本報告のおもな構成は以下の通りである。まず準備として、次節では確率過程の統計量に関して、３節ではウェーブレットとコヒーレント状態とのアナロジーおよび多重解像度分析について、それぞれ本報告に関連する必要最小限の範囲で簡単に触れる。そのあとで、まず４節では、確率過程の２次統計量に関して、非直交ウェーブレット関数系を用いた展開によって自己相関関数を擬似対角化する一般的方法を作用素代数を用いて提案する。次に５節と６節では確率過程の３次統計量について、任意に与えられた３次相関関数をもつような定常確率過程をランダムなウェーブレットの重ね合わせで実際に合成する方法を２種類提案する。なお、４節で用いる関係式の証明を２件ほど本文から末尾に付録として移した。

2 準備その１：確率過程の２次・３次の統計量

連続時間上で定義された（一般には非ガウス性の）確率過程の統計量としては、（それぞれ各次数の）自己相関関数・キュムラント関数・モーメントスペクトル・キュムラントスペクトルなどがあり、これらの統計量が存在する確率過程の場合には、これらのどれか一つを全ての次数（１次・２次・３次・４次‥‥）について知ることができれば、多時刻間の結合（同時）確率分布が指定でき、確率過程が完全に specify できる。ここでは、それらのうち２次と３次の自己相関関数の定義を中心に、ごく簡単に触れる。確率過程 $\{x(t)\}$ の（非定常の場合を含む一般的な記述における）２次・３次の自己相関関数（本報告では適宜省略して自己相関・相関などと呼ぶことにする）は、それぞれ

$$R(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \tag{1}$$

$$R(t_1, t_2, t_3) = E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)] \tag{2}$$

で定義され、当然$(x(t_1), x(t_2))$または$(x(t_1), x(t_2), x(t_3))$ の任意の置換に関して不変であるという対称性をもつ。もし $\{x(t)\}$ が定常過程ならば、上で定義された相関は任意の時間シフトに関して不変、すなわち任意の s について

$$R(t_1+s, t_2+s) = R(t_1, t_2) \tag{3}$$

$$R(t_1+s, t_2+s, t_3+s) = R(t_1, t_2, t_3) \tag{4}$$

となり、したがってそれぞれ（普通にいうところの）２次・３次の自己相関関数

$$R_2(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{5}$$

$$R_3(\tau, \sigma) = E[x(t)x(t+\tau)x(t+\sigma)] \tag{6}$$

によって完全に特徴づけられることになる。上述の対称性により、これらも

$$R_2(\tau) = R_2(-\tau) \tag{7}$$

$$R_3(\tau, \sigma) = R_3(\sigma, \tau) = R_3(-\sigma, \tau-\sigma) \tag{8}$$

なる対称性をもつ。(以上については [19] 参照)

これらの自己相関関数が各次数のモーメント関数なのに対し、これらをキュムラント関数で定義することもある。なお、期待値が時刻によらず常に０の確率過程の場合には、２次・３次のキュムラント関数は各次数の自己相関関数と一致する（４次以上の場合はさにあらず）。また、ガウス性確率過程（単一時刻の値の分布だけでなく任意の多

時刻間の結合確率分布が多次元ガウス分布になっているような過程をいい、相関をもつ有色雑音の場合も含む。なお、物理学の一部の専門分野では、このへんに関して方言にやや混乱があるようです。以上蛇足。）の場合には3次以上のキュムラント関数はすべて 0 である（したがって、平均 0 のガウス性確率過程では3次相関関数も 0 となる）。さらに、これらの関数のフーリエ変換として各次数のモーメント・スペクトル及びキュムラント・スペクトルが定義される。2次のキュムラント・スペクトル（または定義の流儀によっては2次のモーメント・スペクトルをいうこともある）は通常パワ・スペクトルあるいはスペクトル密度関数（工学部方言の古風な言い方では電力スペクトル密度）と呼ばれるもの同じものである。

3 準備2：ウェーブレットとコヒーレント状態とのアナロジー及び 多重解像度分析

ここでは、以下で用いるウェーブレットおよびそれが構成する over-complete な擬似直交関数系と、それらとコヒーレント状態との間に成り立つ深いアナロジー、及び多重解像度分析について簡単に触れる。詳しくは文献 [1]-[6],[10],[21] などにある。

$h(t)$ を $L^2(\mathbf{R})$ に属する関数で、しかもそのフーリエ変換 $\hat{h}(\omega)$ が条件

$$C_h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega \ < \infty \tag{9}$$

を満たすものとする。このとき、ウェーブレット

$$h^{(a,b)}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} h(\frac{t-b}{a}) \tag{10}$$

を定義すると、 $\{h^{(a,b)}(t)|\ a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ でいわゆる（信号処理でいう）擬似直交完全系（注：直交ではない over-complete 系の一種で tight-frame と呼ばれることもある）をなし、任意の $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ について

$$\frac{1}{C_h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da\ db}{a^2} \langle h^{(a,b)}, f\rangle\, h^{(a,b)}(t) = f(t) \tag{11}$$

但し $\quad \left(\langle p, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)^* q(t)\ dt\right)$

が成立する。したがって、任意の二乗可積分関数は、パラメータ a によって表される様々なスケールとパラメータ b で表される生起時刻とをもつ相似形の波束の和に展開できるが、（擬似）基底の過剰性から、そのしかたは一意的ではない。

さらに、特別な場合として、$h(t)$ の関数形をうまく選ぶと、適当な a_0, b_0 について

$$h_{m,n}(t) = h^{(a_0^m, nb_0a_0^m)}(t) \tag{12}$$

と定義したときに $\{h_{m,n}(t)|\ m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$ が $L^2(\mathbf{R})$ で正規直交完全系になるようにとることができる場合がある [2] 。特に $a_0 = 2$ の時には、関数の多重解像度近似と密接な関係のあることが知られている [6] 。このタイプの基底を用いての基底変換は直交ウェーブレット変換と呼ばれ、特に $a_0 = 2$ のものは近年信号処理の様々な分野で盛んに用いられている。これらについては、本節の後半で触れる。

ところで、上述の連続パラメータをもつ非直交ウェーブレットの over-complete 系は、（変数 t を便宜上'位置'に対応させると）量子力学におけるコヒーレント状態と深いアナロジーがあることが知られており [2] 、さらに両者とも 'generalized coherent states' [9] の一種であることが知られている [10] 。（通常の Weyl-Heisenberg 群の）コヒーレント状態をより一般的な関数形に拡張したものを信号処理の記法で書くと

$$C'_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \tag{13}$$

なる任意の二乗可積分関数を用いて

$$g^{(q,p)}(t) = e^{ip(t-q)}\ g(t-q) \tag{14}$$

を定義すると、 $\{g^{(q,p)}(t)|\ q \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ で over-complete な擬似直交完全系をなし、任意の $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ について

$$\frac{1}{2\pi C'_g}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dq\ dp\ \langle g^{(q,p)}, f\rangle\ g^{(q,p)}(t) = f(t) \tag{15}$$

が成立する。特に、

$$g(t) = g_0(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{16}$$

の場合が量子力学の元来の意味でいうコヒーレント状態であり、この場合の $g^{(q,p)}(t)$ ($g_0^{(q,p)}(t)$ と書くことにする) は光子消滅作用素 (ここでは簡単のため無次元化した形で示す。また、Q と P はそれぞれ位置作用素と運動量作用素を表わし、交換関係 $[Q,P]=iI$ を満たす。但し、前述のように Q の固有値に、本報告では後の便宜上、時刻を表す変数 t を対応させている。物理的には無茶苦茶なことをしているが、使える数学を利用させていただく立場で書いていますので、ご容赦下さい。)

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP) \tag{17}$$

の固有状態の波動関数になっている。すなわち

$$g_0^{(q,p)}(t)={}_Q\langle t|\alpha\rangle_a \tag{18}$$

$$a|\alpha\rangle_a=\alpha|\alpha\rangle_a \qquad \text{但し}\quad \alpha=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(q+ip) \tag{19}$$

である。また、よく知られているようにこのコヒーレント状態は over-complete な"擬似直交性関係" (直交ではないことは前述の通り)

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}}d^2\alpha\ \ |\alpha\rangle_a\,{}_a\langle\alpha|=I \tag{20}$$

を満たし、固有値のシフトはユニタリ変換

$$\begin{aligned}&e^{\gamma a^\dagger-\gamma^* a}|\alpha\rangle_a\\&=e^{-iq'P+ip'Q}|\alpha\rangle_a=e^{iIm(\gamma\alpha^*)}|\alpha+\gamma\rangle_a\\&(\text{但し}\quad \gamma=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(q'+ip')\ )\end{aligned} \tag{21}$$

によって行える。一方、ウェーブレットはアフィン群 [7][8] の generalized coherent state と見做せることが知られている [6,10]。ウェーブレットにおいても上述の一般の関数形の (Weyl-Heisenberg 群の) コヒーレント状態の場合と同様に $h(t)$ のとり方には条件 (9) を満たす範囲で自由度があるが、(16) に対応する特殊な場合として

$$h(t)=h_k(t)=\frac{C_k}{(t-i)^{k+1}}\quad (k=1,2,3,..) \tag{22}$$

(但し C_k は定数) の場合のウェーブレット関数系 $\{h_k^{(a,b)}(t)|\ a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}$ は作用素

$$A_k=Q-ikP^{-1} \tag{23}$$

の固有関数系になっていることが示されている [21]。(ウェーブレット関数系を固有関数系としてもつこの作用素を交換関係を利用して見つける方法及びこの固有関数の性質については [21] 参照) すなわち

$$h_k^{(a,b)}(t)={}_Q\langle t|\alpha\rangle_{A_k} \tag{24}$$

$$A_k|\alpha\rangle_{A_k}=\alpha|\alpha\rangle_{A_k} \qquad (\text{但し}\quad \alpha=b+ai\ ) \tag{25}$$

が成立する。さらに (11) に紹介したウェーブレットの擬似直交性関係は、(20) と類似の形の量子力学語に訳せば

$$\frac{1}{C_k}\int_{\mathbf{C}}\frac{d^2\alpha}{(Im\ \alpha)^2}\ \ |\alpha\rangle_{A_k}\,{}_{A_k}\langle\alpha|=I \tag{26}$$

と書き直せる。また、固有値のシフトはユニタリ変換

$$\begin{aligned}&e^{-iq'P}e^{is'B}|\alpha\rangle_{A_k}\\&\qquad=e^{i\theta(s',q',\alpha)}|e^{-s'}(\alpha+q')\rangle_{A_k}\\&(\text{但しここで}\quad B=\tfrac{1}{2}\{Q,P\}\ )\end{aligned} \tag{27}$$

によって行える。作用素 A_k は、光子生成消滅作用素の場合の $[a,a^\dagger]=I$ とは異なり、交換関係

$$[A_k,A_k^\dagger]=2kP^{-2}=-\frac{1}{2k}(A_k-A_k^\dagger)^2 \tag{28}$$

を満たす。作用素 A_k の物理的意味は明らかではない (特に運動量の逆作用素の物理的意味が。但し数学的には単なる積分演算子である) が、この場合の固有関数であるウェーブレットは、Paul と Daubechies によってすでに提案されている'affine coherent state' [10] の波動関数と互いにフーリエ変換・逆変換の関係にあり、位置と運動量を取り替えて考えると水素原子の波動関数と関連づけることができる。以上で示した作用素と非直交ウェーブレットの関連は、次節において、確率過程の自己相関のウェーブレット関数系による擬似対角化を考える際に、応用することができる。

さて、以下では直交ウェーブレットに話題を変える。前述のようにウェーブレット関数の選び方によっては離散パラメータをもつウェーブレット関数系が正規直交完全系を作る場合があるが、そのような性質をもつウェーブレットの関数形をシステマティックに求める方法として、分解能を順次変えて関数を近似していく多重解像度近似に密

接に関連した方法がある。これについては、詳しくは文献 [2,4,5,6] を参照されたい。ここでは、以下で提案するランダム信号の合成法を記述するために必要な、3次元空間で定義された関数の各解像度成分への分解についてごく簡単に触れる。

その前にまず1次元の場合には、スケーリング関数 $\phi(x)$ とウェーブレット関数 $\psi(x)$ をある条件を満たすよう（上記文献参照）にうまく選ぶと、これらに離散パラメータのシフトやスケール変換を施した関数をそれぞれ

$$\phi_{jn}(x) = \sqrt{2^j}\ \phi(2^j x - n) \quad ((n,j) \in \mathbf{Z}^2) \tag{29}$$

$$\psi_{jn}(x) = \sqrt{2^j}\ \psi(2^j x - n) \quad ((n,j) \in \mathbf{Z}^2) \tag{30}$$

と定義するとき、$\{\phi_{jn}(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ によって張られる空間を $\mathbf{V}_j$ とおくと

$$\ldots \subset \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2 \subset \ldots$$

となり、さらに $\lim_{j\to\infty} \mathbf{V}_j$ は $L^2(\mathbf{R})$ で稠密となる（したがって $L^2(\mathbf{R})$ に属する関数の $\mathbf{V}_j$ への射影はスケール 2^{-j} に相当する解像度での近似となる)。さらに $\{\psi_{jn}(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ によって張られる空間を $\mathbf{O}_j$ とおくと、j が異なる $\mathbf{O}_j$ 同志は互いに直交し、さらに $\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{O}_j$ となることから、$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{O}_j$ は $L^2(\mathbf{R})$ において稠密となり、これに対応する基底 $\{\psi_{jn}(x) \mid (j,n) \in \mathbf{Z}^2\}$ は $L^2(\mathbf{R})$ で正規直交完全系をなす（これがすなわち直交ウェーブレット変換の基底となる)。すなわち、(12) において

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 1, \quad h_{m,n}(t) = \psi_{-m\ n}(t) \tag{31}$$

とおいたものが実現していることになる。

以上の議論を3次元の場合に拡張するには、次のようにすればよい。空間 $\mathbf{O}_j^{\odot}$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_j^{\odot} = {} & (\mathbf{O}_j \otimes \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j) \\ & \oplus (\mathbf{V}_j \otimes \mathbf{O}_j \otimes \mathbf{V}_j) \oplus (\mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{O}_j) \\ & \oplus (\mathbf{V}_j \otimes \mathbf{O}_j \otimes \mathbf{O}_j) \oplus (\mathbf{O}_j \otimes \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{O}_j) \\ & \oplus (\mathbf{O}_j \otimes \mathbf{O}_j \otimes \mathbf{V}_j) \oplus (\mathbf{O}_j \otimes \mathbf{O}_j \otimes \mathbf{O}_j)\end{aligned} \tag{32}$$

と定義すれば、j が異なる $\mathbf{O}_j^{\odot}$ は互いに直交し、しかも

$$\mathbf{V}_{j+1} \otimes \mathbf{V}_{j+1} \otimes \mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j \otimes \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{O}_j^{\odot} \tag{33}$$

が成立することから、$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{O}_j^{\odot}$ は $L^2(\mathbf{R}^3)$ において稠密となる。したがって、これに対応する

$$\begin{aligned}& \{\psi_{jm}(x)\phi_{jn}(y)\phi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\phi_{jm}(x)\psi_{jn}(y)\phi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\phi_{jm}(x)\phi_{jn}(y)\psi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\phi_{jm}(x)\psi_{jn}(y)\psi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\psi_{jm}(x)\phi_{jn}(y)\psi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\psi_{jm}(x)\psi_{jn}(y)\phi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\} \\ \cup\ & \{\psi_{jm}(x)\psi_{jn}(y)\psi_{jk}(z) \mid (j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^4\}\end{aligned} \tag{34}$$

は $L^2(\mathbf{R}^3)$ で正規直交完全系をなす。すなわち3次元実線型空間上で定義された任意の2乗可積分関数は、これらの基底関数の重ね合わせとして書け、添字 j で表される解像度の各成分に一意に分解することができる。ここで用いる基底関数にはウェーブレットのみでなくスケーリング関数も含んだものとなっているが、もしウェーブレットのみの積で基底関数を作りたければ、伝統的な変数分離型の多次元直交関数系展開の考えに基づけばよい。すなわち、

$$\bigoplus_{(h,i,j)\in\mathbf{Z}^3} \mathbf{O}_h \otimes \mathbf{O}_i \otimes \mathbf{O}_j \tag{35}$$

も $L^2(\mathbf{R}^3)$ において稠密となるので、これに対応する関数系

$$\{\psi_{hm}(x)\psi_{in}(y)\psi_{jk}(z) \mid (h,i,j,m,n,k) \in \mathbf{Z}^6\} \tag{36}$$

も $L^2(\mathbf{R}^3)$ で正規直交完全系をなし、これを基底として任意の関数を展開できる。但し、この場合には異なるスケールのウェーブレットの積が出てくる点が、前述の場合と異なる。

4 非直交ランダム・ウェーブレット展開による確率過程の2次相関の擬似対角化

有限の分散をもつ平均 0 の確率過程 $\{x(t)\}$ があるとき、値が確率変数となる適当な展開係数の組 $\{c^{(a,b)}\}$ または $\{c_{m,n}\}$ を用いて、前節で述べたウェーブレット関数系（連続パラメータの over-complete な擬似直交系または離散パラメータの直交完全系）で次のように展開する。

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da\,db}{a^2}c^{(a,b)}h^{(a,b)}(t) \tag{37}$$

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{m,n}h_{m,n}(t) \tag{38}$$

（前節で触れたようにいずれの場合もウェーブレット関数系は二乗可積分な関数の空間で完全系をなし、さらにウェーブレット関数の局在性からこの性質はさらに有限な分散をもつ確率過程に拡張可能であるため、このような展開は常に可能であることが示せる。）このとき、 (1) で定義された確率過程の２次の自己相関 $R(s,t)$ のもつ性質は、展開係数の相関

$$\Gamma(a,b;a',b')=E[c^{(a,b)}c^{(a',b')*}] \tag{39}$$

または

$$\Gamma_{m,n;m',n'}=E[c_{m,n}c^{*}_{m',n'}] \tag{40}$$

の性質に翻訳される。ここでもし確率過程のウェーブレット展開という一種の基底変換（もしくは擬似基底変換）によって、もとの確率過程の相関より見やすい形の展開係数の相関に帰着することができれば、ウェーブレット変換は確率過程の取扱いに様々な応用の可能性をもたらすことになる。その極端な場合として、相関が対角化できる場合、すなわち

$$\Gamma(a,b;a',b')=\frac{a^2}{C_h}\gamma(a,b)\delta(a-a')\delta(b-b') \tag{41}$$

あるいは

$$\Gamma_{m,n;m',n'}=\gamma_{m,n}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} \tag{42}$$

となる場合が挙げられる。但し、連続パラメータの非直交ウェーブレット場合には関数系が over-complete であるので、展開 (37) のしかたは一意的ではなく、したがって異なる相関 (39) をもつ展開係数によるウェーブレット関数の重ね合わせが同一の自己相関を作ることができ、この意味では (41) の形が成立するように展開のしかたを選ぶことは、真の意味での相関の対角化ではなく’擬似対角化’とでも呼ぶべきものであり、本報告では便宜上この呼称を用いている。離散パラメータの場合には、残念ながら (42) のような対角化が可能なのは、展開に用いるウェーブレット基底関数系が確率過程の自己相関 (1) の固有関数系と一致いている、すなわち任意の m,n について

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(s,t)h_{m,n}(t)dt=\lambda_{m,n}h_{m,n}(s) \tag{43}$$

が成立する場合に限られる。連続パラメータの場合には、前述のように展開のしかたに自由度があるため、ウェーブレット関数系が自己相関の固有関数系になっていない場合でも擬似対角化できる可能性がある。これと並行した議論は、前節で触れた（ Weyl-Heisenberg 群の）コヒーレント状態の作る over-complete 系に関しても存在し、例えば物理でよく知られた問題では、密度作用素のコヒーレント状態による「対角形式表現」（ Glauber のＰ－表現とも呼ばれる）は、（一部のタチの悪い特殊なものを除き）任意のトレース１の非負作用素がコヒーレント状態ベクトルの over-complete 系を用いて擬似対角化できることを示している [17]（なお、その正の定数倍を考えれば、この議論は有限のトレースをもつ任意の非負作用素に拡張できる)。しかしながら、その場合においても、’擬対角成分’の非負性は保証されないことが知られており、非負作用素の直交完全系による対角化（すなわちスペクトル分解）において対角成分（すなわちスペクトル）の非負性が保証されるのとは事情を異にする。この点は、擬対角成分に確率や分散といった解釈を与える上で大きな障害となる。残念なことに、問題のウェーブレットが作る over-complete 系の場合にも同様の事情があることが、本節末で示される。さて、好都合なことに、前節で述べたようにウェーブレットとコヒーレント状態との間にはアナロジーがあり、しかもウェーブレット関数系を固有関数系としてもつ簡便な作用素が存在することから、Glauber のＰ－表現の時と類似の数学的手法を使うことにより、作用素代数を用いて任意に与えられた自己相関関数のウェーブレットによる擬似対角化の形をシステマティックに計算する方法を以下のように提案することができる [22] 。

用いるウェーブレット関数型として前節で述べた作用素の固有関数系 $\{h_k^{(a,b)}(t)|\ a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}$（ h_k の定義は (22) 式）を用いた場合には、任意の自己相関関数（但し、その自己相関関数が存在するための非負定性条件すなわちその自己相関関数をもつ確率過程が存在するためにはその自己相関関数を積分核としたときの固有値が非負でなければならないという条件を満たしている範囲で任意の） $R(s,t)$ が与えられたとき、

$$R(s,t) = \frac{1}{C_k}\int\int \frac{da\ db}{a^2}\gamma(a,b)h_k^{(a,b)}(s)h_k^{(a,b)*}(t) \tag{44}$$

となるような $\gamma(a,b)$ を計算する方法を考える。まず、

$$\beta(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_k^{(a,b)*}(s)R(s,t)h_k^{(a,b)}(t)dsdt \tag{45}$$

と定義する。(Glauber, Klauder のコヒーレント状態の理論とのアナロジーでは、 $\gamma(a,b)$ は作用素のP－表現で、 $\beta(a,b)$ は作用素のQ－表現で用いられるものにそれぞれ対応する。) もし展開に用いる基底が正規直交完全系ならば $\beta(a,b)$ に相当するものは $\gamma(a,b)$ に相当するものと一致することになるが、ウェーブレット（やコヒーレント）の場合には over-complete 系なので両者は一致しない。しかしながら、作用素 A_k を介して両者の間には次の関係がある。今、 a と b の任意の関数があるとき、これを $\alpha=b+ai$ と $\alpha^*=b-ai$ の関数の形で表したものを $f(\alpha,\alpha^*)$ とし、これのべき展開を

$$f(\alpha,\alpha^*) = \sum_{m,n} C_{m,n}\alpha^m\alpha^{*n} \tag{46}$$

とするとき、この関数に対応する”正順”および”逆順”の作用素 [18] をそれぞれ

$$\mathcal{N}_k\{f(\alpha,\alpha^*)\} = \sum_{m,n} C_{m,n}A_k^{\dagger n}A_k^m \tag{47}$$

$$\mathcal{A}_k\{f(\alpha,\alpha^*)\} = \sum_{m,n} C_{m,n}A_k^m A_k^{\dagger n} \tag{48}$$

と表すことにする。これは、関数の変数 α と α^* の代わりに、(23) で定義された作用素 A_k とその随伴作用素 $A_k^\dagger = Q + ikP^{-1}$ をそれぞれ代入してできる作用素であるが、 A_k と $A_k^\dagger$ は可換ではないので、並べる順序が違うと異なった作用素になる。さて、前述のように $h_k^{(a,b)}(t)$ は作用素 A_k の固有値 $\alpha=b+ai$ に属する固有関数であることから、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_k}\int_{\mathbf{C}}\frac{d^2\alpha}{(Im\ \alpha)^2}\alpha^m\alpha^{*n}|\alpha\rangle_{A_k}\ {}_{A_k}\langle\alpha| \\ &= \frac{1}{C_k}\int_{\mathbf{C}}\frac{d^2\alpha}{(Im\ \alpha)^2}A_k^m|\alpha\rangle_{A_k}\ {}_{A_k}\langle\alpha|A_k^{\dagger n} \\ &= A_k^m A_k^{\dagger n}\end{aligned} \tag{49}$$

が成立することが擬似直交性 (26) より示せることに注意すれば、 $\gamma(a,b)$ と $\beta(a,b)$ を $\alpha=b+ai$ と $\alpha^*=b-ai$ の関数の形で表したものを各々 $\gamma'(\alpha,\alpha^*)$ 及び $\beta'(\alpha,\alpha^*)$ とすると、(24), (25), (44), (48) より、

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(s,t)|s\rangle_Q\ {}_Q\langle t|dsdt \\ &= \frac{1}{C_k}\int_{\mathbf{C}}\frac{d^2\alpha}{(Im\ \alpha)^2}\gamma'(\alpha,\alpha^*)|\alpha\rangle_{A_k}\ {}_{A_k}\langle\alpha| \\ &= \mathcal{A}_k\{\gamma'(\alpha,\alpha^*)\}\end{aligned} \tag{50}$$

が成立する。一方、作用素のべき展開において (28) で示した交換関係を用いて作用素の順序を並べ換えて

$$\mathcal{N}_k\{\eta(\alpha,\alpha^*)\} = \mathcal{A}_k\{\gamma'(\alpha,\alpha^*)\} \tag{51}$$

となるような関数が存在すれば、(24), (45), (59) より

$$\begin{aligned}&{}_{A_k}\langle\alpha|\mathcal{N}_k\{\eta(\alpha,\alpha^*)\}|\alpha\rangle_{A_k} \\ &{}_{A_k}\langle\alpha|\mathcal{A}_k\{\gamma(\alpha,\alpha^*)\}|\alpha\rangle_{A_k} \\ &= \int\int R(s,t)\ {}_{A_k}\langle\alpha|s\rangle_Q\ {}_Q\langle t|\alpha\rangle_{A_k}dsdt \\ &= \beta'(\alpha,\alpha^*)\end{aligned} \tag{52}$$

となるが、

$$\begin{aligned}&{}_{A_k}\langle\alpha|A_k^{\dagger n}A_k^m|\alpha\rangle_{A_k} \\ &= \alpha^m\alpha^{*n}\end{aligned} \tag{53}$$

となることに注意すれば

$$\begin{aligned}&{}_{A_k}\langle\alpha|\mathcal{N}_k\{\eta(\alpha,\alpha^*)\}|\alpha\rangle_{A_k} \\ &= \eta(\alpha,\alpha^*)\end{aligned} \tag{54}$$

となるから、(52) とより

$$\eta(\alpha,\alpha^*) = \beta'(\alpha,\alpha^*) \tag{55}$$

つまり

$$\gamma'(\alpha,\alpha^*) = \mathcal{A}_k^{-1}\{\mathcal{N}_k\{\beta'(\alpha,\alpha)\}\} \tag{56}$$

となり、自己相関関数のウェーブレットによる”対角型内積の成分 (?)” (45)（これは、自己相関関数が与えられれば計算できる）から擬似対角型の展開係数の分散 $\gamma(a,b)$ を計算することができる。すなわち、$\beta'(\alpha,\alpha^*)$ に作用素 $A_k, A_k^\dagger$ を正順で代入した作用素を作り、作用素代数の交換関係を用いてそれと等価な逆順作用素に並べ換えることができれば、その並び換えた逆順作用素の関数形

が目的の $\gamma'(\alpha,\alpha^*)$ になっている。この方法を用いれば、任意に与えられた自己相関関数から、擬似対角形の関数形をシステマティックに計算することができるが、どのようにして作用素の順序を入れ替えるかが問題となる。

コヒーレント状態の時用いる光子消滅作用素と光子生成作用素との間の交換関係とは異なり、交換関係 (28) は複雑で右辺に左辺と同じ次数の項がある。したがって、前者の場合に用いられる、複雑な順序の入れ替えをより低い次数の簡単な入れ替えに順次還元していく方法は、用いることができない。しかしながら、同じ次数の項で関係が閉じているため、対称性に工夫を加えれば、例えば次のような方法で順序の並べ換えを行うことができる。まず、一般の場合を論ずる前に、$\beta(a,b)$ が b に依存しない場合を考える。信号処理の問題に翻訳すると、 b はウェーブレットの生起時刻を表すパラメータなので、これは定常確率過程の場合にちょうど相当する。このとき、以下の関係が成立することが交換関係より証明できる（証明は本報告末尾の付録1に与えてある)。

$$\mathcal{N}_k\{\sum_n c_n(\alpha^*-\alpha)^n\} = \sum_n\left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k-j}{2k}\right)c_n(A_k^\dagger - A_k)^n \tag{57}$$

$$\mathcal{A}_k\{\sum_n c_n(\alpha^*-\alpha)^n\} = \sum_n\left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k+j}{2k}\right)c_n(A_k^\dagger - A_k)^n \tag{58}$$

これらより、

$$\mathcal{A}_k^{-1}\{\mathcal{N}_k\{\sum_n c_n(\alpha^*-\alpha)^n\}\} = \sum_n\left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k-j}{2k+j}\right)c_n(\alpha^* - \alpha)^n \tag{59}$$

が得られ、正順作用素からそれと等価な逆順作用素の関数形が計算できる。スケールパラメータ $a = -(\alpha^*-\alpha)/2$ が周波数の逆数に相当する成分に対応することに注意すれば、パワ・スペクトルが周波数の逆数のべきで展開できるようなタイプの定常過程（但し、低周波側をどこかでカットしないとエネルギーが発散して支障をきたすので、実用上はどこかで切り捨てる）はこの方法で簡単に相関の擬似対角化を行うことができる。次に、定常過程でない場合についても、この方法に準じて並べ換えができる。 $\beta(a,b)$ が

$$\beta(a,b) = \sum_{m,n} c'_{m,n}a^m b^n \tag{60}$$

と書ければ、 $b = \alpha - ai$ であることに注意すれば

$$\beta(a,b) = \sum_{m,n} d'_{m,n}(ai)^m\alpha^n \tag{61}$$

とも展開できる。ところが、やはり交換関係より次の関係が証明できる（証明は本報告末尾の付録2に与えてある)

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_k^{-1}\{\mathcal{N}_k\{(ai)^m\alpha^n\}\}\\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k-j}{2k+j}\right)\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\frac{n^{(r)}}{k^r}\\ &\quad\cdot\left(\prod_{j=n}^{n+r-1}\frac{2k}{2k+j}\right)(ai)^{m+r}\alpha^{n-r}\end{aligned} \tag{62}$$

但しここで

$$n^{(r)} = n(n+1)(n+2)...(n+r-1) \tag{63}$$

である。したがって、一般の非定常な場合も正順作用素からそれと等価な逆順作用素の関数形を計算できる。なお、以上の方法は一般性をもつものであるが、べき展開の収束などに、数学的に厳密に議論する余地がある。

以上の結果は、相関関数が与えられたとき、擬似対角形が一般的に計算できることを示している。しかしながら、求まった $\gamma(a,b)$ が必ずしも非負のもので書けるとは限らないことが、例えば次のような例で示される。今、いかなるパラメータ a,b をもつ $h_k^{(a,b)}(t)$ の定数倍にもなっていない任意の二乗可積分関数 $q(x)$ によって自己相関が

$$R_q(s,t) = q(s)q(t)^* \tag{64}$$

と書ける場合を考える（明らかに核関数の意味で非負定値性条件を満たす対角形であるので、このような自己相関をもつ信号は存在する。実際 deterministic な信号 $q(t)$ はこの形の自己相関をもつ)。さて、この自己相関が非負の擬対角要素の組 $\{\gamma(a,b)\}$ を用いて (44) 式の形の擬似対角型に書けたと仮定すると、 $q(x)$ と直交する任意の関数 $p(x)$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(s)^* R_q(s,t)p(t)dsdt$$

を計算することにより

$$\frac{1}{C_k}\int\int \frac{da\ db}{a^2}\gamma(a,b)|\langle h_k^{(a,b)},p\rangle|^2 = 0 \quad (65)$$

とならなければならない。仮定により $\gamma(a,b)$ は非負であるから、上式が成立するためには内積 $\langle h_k^{(a,b)},p\rangle$ が 0 となるような a,b 以外では $\gamma(a,b)=0$ とならなければならない。この関係が $q(x)$ と直交する任意の関数 $p(x)$ について成立しなければならないが、 $q(x)$ と直交する全ての関数に直交するのは $q(x)$ 自身かその定数倍のみであるから、 $q(x)$ がウェーブレット関数の定数倍になっていないという前提に矛盾する。したがって、 (44) の形の自己相関はどのような展開のしかたをしても全てが非負の擬対角要素からなる擬似対角形には書くことができない。 $\gamma(a,b)$ がランダムに発生するウェーブレットの分散を表す量であり、非負にはなり得ないことを考えると、以上の事実は、あらゆる不規則な変動をいつも互いに独立にランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせと見做すことができるわけではないこと、確率過程をウェーブレット関数形で展開したとき展開係数間の相関を考慮することが不可避である場合が存在することを示している。(なお、作用素 A_k の固有関数系ではない一般のウェーブレットのついても、上記の事実はそのまま成立することが、同様の手法により簡単に示せる。)

5 任意に与えられた3次相関関数をもつ定常確率過程の合成法その1：多重解像度タイプ

前節では、任意に与えられた2次の自己相関関数をもつような確率過程をランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせで作れるかどうかを考え、非直交ウェーブレットによる2次相関の擬似対角化が可能なことを示してきたが、実際にランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせで合成する際に分散のもつべき非負性が障害になることが示された。一方、3次相関にはこれに相当する制約はなく、たとえば離散時間の定常確率過程の場合には（定義による対称性を満たす範囲で）任意の関数形の3次自己相関関数をもつような確率過程を合成する方法（但し、ウェーブレットは用いない）が実際に存在することがすでに示されている [20] 。この議論は連続時間定常確率過程にも拡張できるが、その一つの方法にランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせで合成する方法がある。すなわち、予め作りたい3次相関関数の関数形が任意に与えられた場合に、実際にそのような3次相関関数をもつような定常確率過程をランダムに発生するウェーブレット（とスケーリング関数）によって実際に生成する問題を考える。本節と次節では、その合成法を合わせて2種類提案する。本節で提案するのは同じスケールの成分の間にのみ単純な相関をもたせたウェーブレットとスケーリング関数の組み合わせを用いる方法、次節で提案するのはウェーブレットのみを用いる方法である。

今、任意に与えられた、すなわち"作りたい" 3次相関関数を $R_3^{@}(\tau,\sigma)$ とおく。但し、定義による対称性 (8) を満たす2乗可積分な関数とする。これを作ることは

$$R^{@}(t_1,t_2,t_3) = R_3^{@}(t_2-t_1, t_3-t_1) \qquad (66)$$

なる（ (2) の定義による）3次相関を作ることと同じである。これを用いて

$$R^{@}_{(T)}(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} R^{@}(t_1,t_1,t_3) & (|t_i| \le T\ for\ \forall\ i\ ) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \qquad (67)$$

を定義すると、これは2乗可積分な関数であるので、3節 (34) 式に示した基底で展開可能であり

$$\begin{aligned} R^{@}_{(T)}(t_1,t_2,t_3) \ &= \textstyle\sum_j \sum_{m,n,k} \\ &[\ c^{(\psi\phi\phi)}_{(T)jmnk}\psi_{jm}(t_1)\phi_{jn}(t_2)\phi_{jk}(t_3) \\ &+ c^{(\phi\psi\phi)}_{(T)jmnk}\phi_{jm}(t_1)\psi_{jn}(t_2)\phi_{jk}(t_3) \qquad (68) \\ &+ \ \ldots.(4\text{項省略})\ldots. \\ &+ c^{(\psi\psi\psi)}_{(T)jmnk}\psi_{jm}(t_1)\psi_{jn}(t_2)\psi_{jk}(t_3)\ ] \end{aligned}$$

と書ける。用いる基底関数の局在性を考慮すれば、（ $R^{@}(t_1,t_2,t_3)$ そのものは2乗可積分ではないにもかかわらず）上式の展開において $T\to\infty$ の極限で展開係数（ $c^{(\phi\psi\phi)}_{(T)jmnk}$ など）は有限の値に収束することが示され、したがって $R^{@}(t_1,t_2,t_3)$ は次のように展開される。(展開を有限項で打ち切ったときの誤差の2乗ノルムは、$\mathbf{R}^3$ 全体で定義すると

無限大になるが、有限領域で定義すると項数が増えるにつれ 0 に収束する。)

$$
\begin{aligned}
R^{@}(t_1,t_2,t_3) &= \textstyle\sum_j \sum_{m,n,k} \\
&\Big[\, c^{(\psi\phi\phi)}_{jmnk}\psi_{jm}(t_1)\phi_{jn}(t_2)\phi_{jk}(t_3) \\
&+ \text{....(5 項省略)....} \\
&+ c^{(\psi\psi\psi)}_{jmnk}\psi_{jm}(t_1)\psi_{jn}(t_2)\psi_{jk}(t_3) \,\Big]
\end{aligned}
\tag{69}
$$

本節の冒頭で触れたように 3 次相関は 3 つの時刻の間の置換と任意の時間シフトに関して不変であるから、(29), (30) 式に注意すれば、上式に現れる展開係数において右肩添字中の ϕ や ψ を ♠ ◇ ♡ でまとめて表すと、任意の整数 i,j,k,l について

$$
c^{(\spadesuit\diamondsuit\heartsuit)}_{jmnk} = c^{(\diamondsuit\heartsuit\spadesuit)}_{jnkm} = \ldots.. = c^{(\heartsuit\diamondsuit\spadesuit)}_{jknm} \tag{70}
$$

$$
c^{(\spadesuit\diamondsuit\heartsuit)}_{j\ m+l\ n+l\ k+l} = c^{(\spadesuit\diamondsuit\heartsuit)}_{jmnk} \tag{71}
$$

となる。さらに

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{L}\textstyle\int_0^L R^{@}(t_1-t,t_2-t,t_3-t)\,dt \\
&= R^{@}(t_1,t_2,t_3)\ \ (for L>0),
\end{aligned}
$$

$$
\sum_l \int_0^{2^{-j}} f(t-2^{-j}l)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt
$$

であることに注意すれば、(29), (30), (70), (71) より (69) は

$$
\begin{aligned}
&R^{@}(t_1,t_2,t_3) = \textstyle\sum_j \sum_{n,k} \Big[\, c^{(\psi\phi\phi)}_{j0nk}\cdot 2^{j-1} \\
&\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi_{j0}(t_1-t)\phi_{jn}(t_2-t)\phi_{jk}(t_3-t) \\
&\ +\phi_{jn}(t_1-t)\psi_{j0}(t_2-t)\phi_{jk}(t_3-t) \\
&\ +\text{....(3 項省略,}(\psi_{j0},\phi_{jn},\phi_{jk})\text{ の置換)....} \\
&\ +\phi_{jk}(t_1-t)\phi_{jn}(t_2-t)\psi_{j0}(t_3-t)\}\,dt \\
&+ c^{(\psi\psi\phi)}_{j0nk}\cdot 2^{j-1}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \\
&\{\psi_{j0}(t_1-t)\psi_{jn}(t_2-t)\phi_{jk}(t_3-t) \\
&+\text{...(4 項省略,}(\psi_{j0},\psi_{jn},\phi_{jk})\text{ の置換)...} \\
&+\phi_{jk}(t_1-t)\psi_{jn}(t_2-t)\psi_{j0}(t_3-t)\}\,dt \\
&+ c^{(\psi\psi\psi)}_{j0nk}\cdot 2^{j-1}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \\
&\{\psi_{j0}(t_1-t)\psi_{jn}(t_2-t)\psi_{jk}(t_3-t)+ \\
&+\text{...(4 項省略,}(\psi_{j0},\psi_{jn},\psi_{jk})\text{ の置換)...} \\
&+\psi_{jk}(t_1-t)\psi_{jn}(t_2-t)\psi_{j0}(t_3-t)\}dt \,\Big]
\end{aligned}
\tag{72}
$$

の形にも書き換えられることがわかる。以下で示すようにこの形の 3 次相関関数をもつ定常確率過程は、i.i.d. 過程とポアソン過程を用いて実際に合成することができる。

今、平均と 3 次モーメントがと共に 0 で分散が κ の互いに独立な多数の i.i.d. 過程

$$
\begin{aligned}
&\{\epsilon^{(p)}_{jnkq}(l) \mid l \in \mathbf{Z}\} \\
&\qquad ((j,n,k)\in\mathbf{Z}^3; q=1,2,3; p=1,2,3)
\end{aligned}
$$

を用意し、これらを用いて

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta^{(1)}_{jnkq}(l) &= \epsilon^{(2)}_{jnkq}(l)\ \epsilon^{(3)}_{jnkq}(l) \\
\zeta^{(2)}_{jnkq}(l) &= \epsilon^{(3)}_{jnkq}(l)\ \epsilon^{(1)}_{jnkq}(l) \\
\zeta^{(3)}_{jnkq}(l) &= \epsilon^{(1)}_{jnkq}(l)\ \epsilon^{(2)}_{jnkq}(l)
\end{aligned}
\right\}
\tag{73}
$$

を定義すると、

$$
\begin{aligned}
&\{\zeta^{(p)}_{jnkq}(l) \mid l \in \mathbf{Z}\} \\
&\qquad ((j,n,k)\in\mathbf{Z}^3; q=1,2,3; p=1,2,3)
\end{aligned}
$$

はそれぞれ単独では i.i.d. 過程であり、しかも

$$
E[\zeta^{(p)}_{jnkq}(l)] = 0 \tag{74}
$$

$$
E[\zeta^{(p)}_{jnkq}(l)\ \zeta^{(p')}_{jnkq}(l')] = \kappa^2\ \delta_{ll'}\ \delta_{pp'} \tag{75}
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\zeta^{(p)}_{jnkq}(l)\ \zeta^{(p')}_{jnkq}(l')\ \zeta^{(p'')}_{jnkq}(l'')] \\
&= \begin{cases} \kappa^3 & (p \neq p\prime \neq p'' \neq p\ \ and\ \ l = l' = l'') \\ 0 & (otherwise) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

となり、さらに q,n,j,k のうちどれか 1 つでも異なれば互いに独立である。一方、これらとは別に、それぞれ強度 (intensity) が λ の互いの独立なポアソン過程(注:計数過程の形のものを指す)

$$
\{N^{\pm}_{jnkq}(t)\}\ \ ((j,n,k)\in\mathbf{Z}^3; q=1,2,3)
$$

を用意し、これらの増分をトリガとしてスケーリング関数またはウェーブレット関数の組を次式に基づいて発生させることにより、多数の互いに独立な確率過程

$$
\{x_{jnkq}(t)\}\ \ ((j,n,k)\in\mathbf{Z}^3; q=1,2,3)
$$

を作る。

$$
\begin{aligned}
&x_{jnk1}(t) = \left(2^{j-1}\kappa^{-3}\lambda^{-1}c^{(\psi\phi\phi)}_{j0nk}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\textstyle\sum_{\pm}\int_0^{\infty}\{\zeta^{(1)}_{jnk1}(\pm N^{\pm}_{jnk1}(s))\ \psi_{j0}(t\mp s) \\
&+\zeta^{(2)}_{jnk1}(\pm N^{\pm}_{jnk1}(s))\ \phi_{jn}(t\mp s) \\
&+\zeta^{(3)}_{jnk1}(\pm N^{\pm}_{jnk1}(s))\ \phi_{jk}(t\mp s)\}dN^{\pm}_{jnk1}(s)
\end{aligned}
\tag{77}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_{jnk2}(t) = \left(2^{j-1}\kappa^{-3}\lambda^{-1}c^{(\psi\psi\phi)}_{j0nk}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\textstyle\sum_{\pm}\int_0^{\infty}\{\zeta^{(1)}_{jnk2}(\pm N^{\pm}_{jnl1}(s))\ \psi_{j0}(t\mp s) \\
&+\zeta^{(2)}_{jnk2}(\pm N^{\pm}_{jnl1}(s))\ \psi_{jn}(t\mp s) \\
&+\zeta^{(3)}_{jnk2}(\pm N^{\pm}_{jnl1}(s))\ \phi_{jk}(t\mp s)\}dN^{\pm}_{jnk1}(s)
\end{aligned}
\tag{78}
$$

$$x_{jnk3}(t)=\left(2^{j-1}\kappa^{-3}\lambda^{-1}c_{j0nk}^{(\psi\psi\psi)}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_{\pm}\int_0^\infty\{\zeta_{jnk3}^{(1)}(\pm N_{jnl1}^{\pm}(s))\,\psi_{j0}(t\mp s) +\zeta_{jnk3}^{(2)}(\pm N_{jnl1}^{\pm}(s))\,\psi_{jn}(t\mp s) +\zeta_{jnk3}^{(3)}(\pm N_{jnl1}^{\pm}(s))\,\psi_{jk}(t\mp s)\}dN_{jnk1}^{\pm}(s) \tag{79}$$

ここで、同じ強度をもつ独立な2つのポアソン過程 $\{N^{\pm}(t)\}$ について $\sum_{\pm}\int_0^\infty f(\pm s)dN^{\pm}(s)$ はポアソン過程の増分過程を $t<0$ にも拡張したもの（ポアソン白色過程とも呼ばれるランダム・インパルス列として扱われることもある）において増分（インパルス）が発生したときの関数 $f(t)$ の値の総和をとったものを表しており、$t<0$ にも拡張された増分過程は定常過程である（繋ぎ目の $t=0$ 付近で非定常性が現れないことは、いわゆる waiting-time paradox と関連して知られている）ことに注意すれば、上で作った確率過程 $\{x_{jnkq}(t)\}$ はいずれも平均 0 の定常過程であり、しかもエルゴード性をもつことが示せる。さて、(77) – (79) のように定義すると、$\{x_{jnk1}(t)\}$ の3次相関は (72) 式中の $c_{j0nk}^{(\psi\phi\phi)}$ を係数とする6つの被積分関数を含む項に、$\{x_{jnk2}(t)\}$ の3次相関は (72) 式中の $c_{j0nk}^{(\psi\psi\phi)}$ を係数とする6つの被積分関数を含む項に、$\{x_{jnk3}(t)\}$ の3次相関は (72) 式中の $c_{j0nk}^{(\psi\psi\psi)}$ を係数とする6つの被積分関数を含む項に、それぞれ一致する。したがって、確率過程間の独立性に注意すれば、新たに確率過程 $\{x(t)\}$ を

$$x(t)=\sum_j\sum_{n,k}\sum_{q=1}^{3}x_{jnkq}(t) \tag{80}$$

で定義すれば、$\{x(t)\}$ は平均が 0 で、その3次相関は (72) 式に一致し、したがって $\{x(t)\}$ は"求められた" 3次相関関数 $R_3^{@}(\tau,\sigma)$ をもつ平均 0 の定常過程となる。

以上の方法によって与えられた3次相関関数をもつような確率過程を合成することができたが、(80) 式において無限個の独立な確率過程の重ね合わせを行っているため、有界な2次統計量をもっているかどうかをチェックする必要がある。簡単な計算により、"作りたい" 3次相関の展開係数が少なくとも条件

$$\sum_j\sum_{n,k}2^{\frac{5}{3}j}|c_{j0nk}^{(\spadesuit\diamondsuit\heartsuit)}|^{\frac{2}{3}}<\infty \tag{81}$$

を満たせば、必ず有限の分散となることが示せる。

6　任意に与えられた3次相関関数をもつ定常確率過程の合成法その2：多次元展開タイプ

前節で提案した方法は、3節後半で紹介した3次元版多重解像度分析で用いる基底 (34) を応用したものであるが、3節末尾で触れたように多次元変数分離型直交関数系展開型の基底 (36) を用いてもほぼ同様のことができる。前節の方法では、ウェーブレットの他にスケーリング関数が必要であったが、後者の方法を用いるとウェーブレットのみを用いて合成ができる利点がある。以下では、この方法と前節の方法の相違点を中心に説明する（紙面の都合上、前節の方法と共通の点は冗長になるので適宜省略する）。

前節 (69) 式の代わりに、今度の方法では3次相関を

$$R^{@}(t_1,t_2,t_3)=\sum_{h,i,j}\sum_{m,n,k} \tilde{c}_{hijmnk}\psi_{hm}(t_1)\psi_{in}(t_2)\psi_{jk}(t_3) \tag{82}$$

で展開する。(71) に対応するものが、$h\le i\le j$ のとき任意の整数 l について

$$\tilde{c}_{h\ i\ j\ m+l\ n+2^{i-h}l\ k+2^{j-h}l}=\tilde{c}_{hijmnk} \tag{83}$$

となることに注意すれば、(72) に相当するものは（被積分関数を最長周期 2^{-h} にわたって前節と同様の平均操作を行い整理することにより）

$$\begin{aligned}R^{@}(t_1,t_2,t_3)&=\sum_{h\le i\le j}\sum_{n,k}2^h\tilde{c}_{hij0nk}\\&\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi_{h0}(t_1-t)\psi_{in}(t_2-t)\psi_{jk}(t_3-t)\\&+\psi_{in}(t_1-t)\psi_{h0}(t_2-t)\psi_{jk}(t_3-t)\\&+\ldots(3\text{項省略},(\psi_{h0},\psi_{in},\psi_{jk})\text{の置換})\ldots\\&+\psi_{jk}(t_1-t)\psi_{in}(t_2-t)\psi_{h0}(t_3-t)\}\,dt\end{aligned} \tag{84}$$

となる。したがって、以下では前節で確率過程に付けた添字 q は不要になり、その代わりに前節のモデルでは j だけでよかったスケールを表すパラメータが h,i,j の3個必要となるが、$h\le i\le j$ なる組み合わせについてのみ考えればよいことになる。(77) – (79) の代わりに

$$\tilde{x}_{hijnk}(t)=\left(2^h\kappa^{-3}\lambda^{-1}\tilde{c}_{hij0nk}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_{\pm}\int_0^\infty\{\tilde{\zeta}_{hijnk}^{(1)}(\pm\tilde{N}_{jnk}^{\pm}(s))\,\psi_{h0}(t\mp s) +\tilde{\zeta}_{hijnk}^{(2)}(\pm\tilde{N}_{hijnk}^{\pm}(s))\,\psi_{in}(t\mp s) +\tilde{\zeta}_{hijnk}^{(3)}(\pm\tilde{N}_{hijnk}^{\pm}(s))\,\psi_{jk}(t\mp s)\}d\tilde{N}_{hijnk}^{\pm}(s)$$

を定義し、 (80) に代わって

$$\tilde{x}(t) = \sum_{h \leq i \leq j} \sum_{n,k} \tilde{x}_{hijnk}(t) \tag{86}$$

で定義すれば、$\{\tilde{x}(t)\}$ は平均が 0 で、"求められた" 3 次相関関数 $R_3^{\circledcirc}(\tau, \sigma)$ をもつ平均 0 の定常過程となる。

この方法ではウェーブレットのみのランダムな重ね合わせで合成できるが、前節の方法とは異なり、異なるスケールの成分の間が独立にはならない。なお、このモデルで作られる確率過程の分散は、条件

$$\sum_{h \leq i \leq j} \sum_{n,k} 2^{h+\frac{2}{3}j} |\tilde{c}_{hij0nk}|^{\frac{2}{3}} < \infty \tag{87}$$

が満たされれば、必ず有限となることが示せる。

7 おわりに

不規則な変動をランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせとして捉えられないかという観点から、任意に与えられた 2 次あるいは 3 次の自己相関関数をもつような確率過程をランダム・ウェーブレットの重ね合わせで簡単に合成する一般的方法があるかどうかについて調べてきた。

2 次相関の場合、文献 [21] において提案した作用素の固有関数系となっている非直交ウェーブレット関数系を用いたときには、作用素代数の応用により、任意に与えられた自己相関関数から擬似対角形式の形を計算するシステマティックな方法があることを示した。しかしながら、擬似対角成分が必ずしも非負になるとは限らず、したがって独立にランダムに発生するウェーブレットの重ね合わせという描像では捉えられない例があることも示した。

一方、3 次相関の場合には、2 次の場合のような非負条件がないことから、相関の対角化ではないが別の比較的簡単な方法で問題解決できることがわかり、具体的な確率過程の合成法を 2 種類提案した。これは、要求された 3 次相関関数のの各解像度成分のみをもつ無数の互いに独立な定常過程を、 i.i.d. 過程とポアソン過程から比較的単純なアルゴリズムによって生成できる特殊な相関をもたせたランダムな直交ウェーブレット（およびスケーリング関数）を用いて作り、それらを重ね合わせることによるものであり、" 3 次相関のスケール分解" に並行した確率過程の生成法となっている。

ところで、今回 2 次相関について提案した擬似対角化の作用素代数を用いた計算法において、べき級数の収束をもう少し数学的に厳密に吟味する問題が今後の課題として残されている。また、これまでウェーブレットは微分・積分演算と相性が悪いと言われてきたが、2 次相関について今回提案した方法には微分や積分の演算子と比較的簡単な形で関係づけられるという利点があり（本報告で詳しくは触れなかったが、微分・積分演算が k に関する昇降演算子になっていることと、 $A_k - Q$ が積分作用素なので固有関数の場合は積分の代わりに定数倍と乗算を用いて代用できることが、何かに使えそうである。また、作用素 A_k に数学的に対応する信号処理の演算子が応用分野において積分器と乗算回路で比較的簡単にハードウェア構成できる点も興味深い。)、例えば統計的信号処理のアルゴリズムの改良などへのさらなる応用の可能性を探って行きたい。

謝辞

日頃より統計的信号処理・確率過程の応用に関して多くのことを教えて頂いた京都大学工学部の酒井英昭先生に感謝いたします。また、かつて京都大学理学部の量子光学セミナーではいろいろと勉強させて頂き、福井大学の長谷川洋先生・京都大学の池田研介・戸田幹人両先生はじめ旧メンバーの皆様方に感謝したく存じます。さらに、今回の研究会において、門外漢である筆者に参加・発表の機会を与えて下さった筑波大学の有光俊彦先生はじめ研究会メンバーの先生方に御礼申し上げます。

参考文献

[1] Morlet,J. et al., *Geophysics*, **47**, 203- (1982)

[2] Daubechies,I. *IEEE-IT*, **36**, 961- (1990)

[3] Grossman,A. et al., in *Wavelets*(Combes,J.M. et al. eds.), Springer, 2- (1989)

[4] Daubechies,I. *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM (1992)

[5] Meyer,Y., *Wavelets: Algorithms & Applications*(Ryan,R.D. tr.), SIAM

[6] Mallat,S., *IEEE-PAMI*, **11**, 674- (1989) (1993)

[7] Gel'fand,I.M. & Neumark,M.A. *C.R. Acad. Sci. USSR*, **55**, 567- (1947)

[8] Aslaksen,E.W. & Klauder,J.R. *J. Math. Phys.*, **9**, 206- (1968) ; *J. Math. Phys.*, **10**, 2267- (1969)

[9] Perelomov,A.M., *Soviet Physics Uspekhi*, **20**, 703- (1977)

[10] Daubechies,I. & Paul,T., *Proc. 8th Int. Congr. Math. Phys., Marseilles*, 675- (1986)

[11] Wornell,G.W., *IEEE-IT*, **36**, 859- (1990)

[12] Tewfik,A.H., & Kim,M., *IEEE-IT*, **38**, 904- (1992)

[13] Flandlin,P., *IEEE-IT*, **38**, 910- (1992)

[14] Wong.,P., *IEEE-IT*, **39**, 7- (1993)

[15] 坂口, 電子情報通信学会論文誌A, **76**, 1066- (1993)

[16] Glauber,R.J., *Phys. Rev.* , **131**, 2766- (1963)

[17] Klauder,J.R. & Sudarshan E.C.G., ***Fundamentals of Quantum Optics***, W. A. Benjamin, Inc. (1968)

[18] Louisell,W.H., ***Quantum Statistical Properties of Radiation***, John Wiley & Sons, Chap.3 (1973)

[19] Brillinger,D.R. and Rosenblatt,M., in *Spectral Analysis of Time Series*(Harris,B. ed.), Wiley, 153- (1967)

[20] Sakaguchi,F. and Sakai,H., *J. Time Series Analysis*, **10**, 171- (1989)

[21] Sakaguchi,F., *Proc. ICCS/ISITA'93, Siagapore*, 107- (1993)

[22] Sakaguchi,F., (submitted)

付録1：(57),(58) 式の証明

両式を証明するには、それぞれ

$$\mathcal{N}_k\{(\alpha^*-\alpha)^n\} = \left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k-j}{2k}\right)(A_k^\dagger - A_k)^n \tag{88}$$

$$\mathcal{A}_k\{(\alpha^*-\alpha)^n\} = \left(\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2k+j}{2k}\right)(A_k^\dagger - A_k)^n \tag{89}$$

を証明すれば十分である。今、作用素

$$R_k = ikP^{-1} = \frac{1}{2}(A_k^\dagger - A_k) \tag{90}$$

を定義すると、(28) より次の交換関係が成立する。

$$[A_k^\dagger, R_k] = [A_k, R_k] = [Q, R_k] = -\frac{1}{k}R_k^2 \tag{91}$$

さらにこれより

$$[A_k^\dagger, R_k^n] = [A_k, R_k^n] = [Q, R_k^n] = -\frac{n}{k}R_k^{n+1} \tag{92}$$

が成立するが、これを用いて (88),(89) を次のような（ n に関する）数学的帰納法によって証明できる。まず、 $n=1$ のとき (88),(89) が成立しているのは明らかである。また、 $n=l$ のとき成り立っているとすると．

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{j=0}^{l-1}\frac{2k}{2k-j}\right)\mathcal{N}_k\{(\alpha^*-\alpha)^{l+1}\} \\
&= A_k^\dagger(A_k^\dagger - A_k)^l - (A_k^\dagger - A_k)^l A_k \\
&= (A_k^\dagger - A_k)^{l+1} - 2^l[A_k, R_k^l] \\
&= (A_k^\dagger - A_k)^{l+1} - \frac{2^l l}{k}R_k^{l+1} \\
&= (A_k^\dagger - A_k)^{l+1} - \frac{l}{2k}(A_k^\dagger - A_k)^{l+1} \\
&= \frac{2k-l}{2k}(A_k^\dagger - A_k)^{l+1}
\end{aligned} \tag{93}$$

同様に

$$\left(\prod_{j=0}^{l-1}\frac{2k}{2k+j}\right)\mathcal{A}_k\{(\alpha^*-\alpha)^{l+1}\}$$
$$=(A_k^\dagger-A_k)^lA_k^\dagger-A_k(A_k^\dagger-A_k)^l \quad (94)$$
$$=(A_k^\dagger-A_k)^{l+1}+2^l[A_k,R_k^l]$$
$$=\frac{2k+l}{2k}(A_k^\dagger-A_k)^{l+1}$$

となり、このことから $n=l+1$ のときも (88),(89) が成立することが示される。よって証明された。

付録２：(62) 式の証明

交換関係 (28),(91),(92) においては、右辺は全て左辺と次数の等しい項のみからなっている。したがって A_k と R_k のべきは、その順序を入れ替える度に様々な項が出てくるが、必ず同じ次数の項しか出てこない。この性質は並べ換えを何回行っても成立するので、ある係数 $\{d_{m,n,s}\}$ を用いて

$$R_k^nA_k^m=\sum_{s=0}^{m}d_{m,n,s}A_k^sR_k^{m+n-s} \quad (95)$$

$$R_k^nA_k^m=\sum_{s=0}^{m}d_{m,n,s}A_k^sR_k^{m+n-s} \quad (96)$$

と書ける。すると (92) より

$$\begin{aligned}R_k^nA_k^{m+1}&=\sum_{s=0}^{m}d_{m,n,s}A_k^sR_k^{m+n-s}A_k\\&=\sum_{s=0}^{m}d_{m,n,s}\left(A_k^{s+1}R_k^{m+n-s}-A_k^s[A_k,R_k^{m+n-s}]\right)\\&=\sum_{s=0}^{m+1}\left(d_{m,n,s-1}+\frac{m+n-s}{k}d_{m,n,s}\right)A_k^sR_k^{m+n-s}A_k\end{aligned} \quad (97)$$

（但し、 $d_{m,n,-1}=d_{m,n,m+1}=0$ とする。）

となり、これより係数の漸化式

$$d_{m+1,n,s}=d_{m,n,s-1}+\frac{m+n-s}{k}d_{m,n,s} \quad (98)$$

が得られるが、$d_{0,n,0}=1$ に注意すれば、この解は（ (63) で定義された $n^{(r)}$ を用いて表すと）

$$d_{m,n,s}={}_mC_s\frac{n^{(m-s)}}{k^{m-s}} \quad (99)$$

であることが示される（実際に代入すると漸化式が満たされているのを確かめることができる）。

これより、（ ${}_mC_{m-s}={}_mC_s$ に注意すれば）

$$R_k^nA_k^m=\sum_{s=0}^{m}{}_mC_r\frac{n^{(r)}}{k^r}A_k^rR_k^{m+n-r} \quad (100)$$

となり、これと (88),(89),(90) より (62) が示せる。